

305

F

نام

نام خانوادگی

محل امضاء



305F



اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.  
اتام خمینی (ره)

صبح جمعه

۹۱/۱۲/۱۸

دفترچه شماره ۱

جمهوری اسلامی ایران  
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
سازمان سنجش آموزش کشور

**آزمون ورودی**  
**دوره‌های دکتری (نیمه متمرکز) داخل**  
**در سال ۱۳۹۲**

**رشته‌ی**  
**مجموعه ریاضی - ریاضی کاربردی (کد ۲۲۳۴)**

مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۴۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مجموعه دروس تخصصی (آنالیز ریاضی ۱، جبر خطی، آنالیز عددی ۱، آنالیز عددی پیشرفته، آنالیز حقیقی ۱، تحقیق در عملیات پیشرفته ۱)	۴۵	۱	۴۵

این آزمون نمره منفی دارد

**اسفندماه سال ۱۳۹۱**

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی‌باشد.

حق چاپ و تکثیر سؤالات پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

# پی اچ دی تست ، وب سایت تخصصی آزمون دکتری

صفحه ۲

305F

مجموعه دروس تخصصی (انالیز ریاضی ۱، جبر خطی، آنالیز عددی، آنالیز عددی پیشرفته، آنالیز حقیقی ۱، تحقیق در عملیات پیشرفته)

۱- فرض کنید  $V$  یک فضای برداری با بعد  $n$  روی میدان  $F$  باشد. اگر  $T: V \rightarrow V$  یک تبدیل خطی باشد به طوری که  $T^2 = 0$ ، آن گاه  $\text{rank}(T)$  رتبه‌ی  $T$  و  $n(T)$  پوچی  $T$  است.

$$\text{rank}(T) \leq \frac{n}{2} \quad (۱)$$

$$n(T) \leq \frac{n}{2} \quad (۲)$$

$$\text{rank}(T) \geq \frac{n}{2} \quad (۳)$$

$$\text{rank}(T) \geq n(T) \quad (۴)$$

۲- فرض کنید  $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & 1 & t \end{pmatrix} \in M_F(R)$ ، اگر  $\text{rank}(A) = 3$ ، مقدار  $t$  کدام است؟

$$۱ \quad (۱)$$

$$۰ \quad (۲)$$

$$-۲ \quad (۳)$$

$$-۱ \quad (۴)$$

۳- فرض کنید  $A \in M_n(R)$  که  $n \geq 2$ ، شرط لازم و کافی برای آنکه برای هر  $B \in M_n(R)$  داشته باشیم  $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$  آن است که:

$$\det(A) = 0 \quad (۱)$$

$$A = 0 \quad (۲)$$

$$\text{tr}(A) = 0 \quad (۳)$$

$$A \text{ پوچتوان باشد.} \quad (۴)$$

۴- اگر  $A$  یک ماتریس پاد متقارن از مرتبه‌ی  $n$  باشد یعنی  $A^t = -A$ ، کدام عبارت در مورد ماتریس الحاقی کلاسیک  $A$  یعنی  $\text{adj}A$  درست است؟

$$\text{adj}A \text{ متقارن است.} \quad (۱)$$

$$\text{adj}A \text{ پاد متقارن است.} \quad (۲)$$

$$\text{adj}A \text{ پادمتقارن است اگر } n \text{ فرد باشد و متقارن است اگر } n \text{ زوج باشد.} \quad (۳)$$

$$\text{adj}A \text{ متقارن است اگر } n \text{ فرد باشد و پاد متقارن است اگر } n \text{ زوج باشد.} \quad (۴)$$

۵- فرض کنید  $A$  ماتریسی  $10 \times 10$  با درایه‌های  $\pm 1$  باشد. کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

$$3^9 \mid \det A \quad (۱)$$

$$5^9 \mid \det A \quad (۲)$$

$$2^9 \mid \det A \quad (۳)$$

$$7^9 \mid \det A \quad (۴)$$

# پی اچ دی تست ، وب سایت تخصصی آزمون دکتری

صفحه ۳ 305F

مجموعه دروس تخصصی (آلایر ریاضی ۱، جبر خطی، آلایر عددی، آلایر عددی پیشرفته، آلایر حقیقی ۱، تحقیق در عملیات پیشرفته)

۶- فرض کنید یک دستگاه خطی  $Ax = b$  با روش حذفی گوس و انتخاب محور سطری (یا جزئی) در یک کامپیوتر حل شده و جواب  $\bar{x}$  محاسبه شده است. اگر روند عدد یک در ماشین تقریباً برابر  $10^{-t}$  و عدد حالت ماتریس  $A$  تقریباً برابر  $10^{t/2}$  باشد، در این صورت ..... رقم درست داشته باشد.

(۱) نمی‌توان انتظار داشت که  $\bar{x}$  هیچ

(۲) نمی‌توان انتظار داشت که  $\bar{x}$  حتی یک

(۳) می‌توان انتظار داشت که  $\bar{x}$  تقریباً  $\frac{t}{2}$

(۴) می‌توان انتظار داشت که  $\bar{x}$  حداکثر یک

۷- فرض کنید  $f(x^*) = f'(x^*) = 0$  و  $f''(x^*) \neq 0$ . مقدار  $k$  چقدر باشد تا آهنگ (یا نرخ) همگرایی مجانبی تکرار نقطه ثابت

$$x_{n+1} = x_n - \frac{k f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

با شروع از یک نقطه مناسب  $x_0$ ، به  $x^*$  ریشه‌ی  $f(x) = 0$ ، دست کم برابر ۲ باشد (با فرض هموار بودن مناسب  $f$ )؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳)  $\sqrt{2}$

(۴) ۳

۸- فرض کنید  $x$  عددی نزدیک صفر باشد. می‌دانیم:  $(1+x^2) \log_e(1+x^2) = O(x^k)$  مقدار  $k$  برابر است

با:

(۱) ۴

(۲) ۵

(۳) ۷

(۴) ۶

۹- برای  $f(x) = x^n$ ،  $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n$ ، مقدار  $f[x_0, \dots, x_k]$ ، به ازای  $k = n$  و  $k = n+1$ ، به ترتیب برابر است با:

(۱) ۱ و ۰

(۲) ۱ و ۰

(۳) ۱ و ۰ تنها وقتی  $x_i$ ها متمایز باشند

(۴) ۰ و ۱ تنها وقتی  $x_i$ ها متمایز باشند

آهنگ (یا نرخ) همگرایی مجانبی تکرار نقطه‌ای ثابت

-۱۰

$$x_{n+1} = \frac{1}{k} \left( (k-1)x_n + \frac{A}{x_n^{k-1}} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

با شروع از یک نقطه  $x_0$  مناسب برای تخمین  $\sqrt[k]{A}$  با  $A > 0$  و  $k \geq 2$  دست کم برابر است با:

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳)  $\frac{\sqrt{k}+1}{2}$

(۴) ۳

-۱۱ با فرض آنکه  $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ، کدام یک از ضوابط ذیل یک نرم بر  $\mathbb{R}^2$  تعریف نمی‌کند؟

(۱)  $\|z\| = |x| + |y|$

(۲)  $\|z\| = (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^2$

(۳)  $\|z\| = (|x|^r + |y|^r)^{\frac{1}{r}}$

(۴)  $\|z\| = \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}}$

-۱۲ در فضای متریک  $(X, d)$  نقطه  $p \in X$  یک نقطه تراکم  $F$  است هرگاه هر همسایگی  $p$  مجموعه  $E$  را در نا شمارا نقطه قطع کند. در  $\mathbb{R}^k$  با متریک اقلیدسی اگر  $E$  نا شمارا و  $F$  مجموعه نقاط تراکم  $E$  باشد آنگاه:

(۱)  $F$  نا شمارا است.

(۲)  $E \cap F$  نا شمارا است.

(۳)  $F$  کامل است. (یعنی  $F' = F$ ).

(۴) همه موارد صحیح است.

-۱۳ کدام یک از مجموعه‌های زیر نمی‌تواند مجموعه حدود زیر دنباله‌ای یک دنباله حقیقی باشد؟

(۱)  $\left\{ \frac{1}{n} : n \geq 1 \right\} \cup \{0\}$

(۲)  $\mathbb{Z}$

(۳)  $\left\{ \frac{1}{n} : n \geq 1 \right\}$

(۴) گزینه‌های (۲) و (۳) صحیح‌اند.

-۱۴ فرض کنید  $A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$  و تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه  $f(x) = \inf\{ |y - x| : y \in A \}$  تعریف شود. در صورتی که  $K$  مجموعه نقاطی باشد که تابع  $f$  در آن نقاط مشتق پذیر نیست، کدام گزینه صحیح است؟

(۱) هر نقطه  $K$ ، نقطه‌ای تنها در  $K$  است.

(۲)  $K$  بسته است ولی فشرده نیست.

(۳)  $K$  فشرده است.

(۴)  $K$  بسته نیست.

۱۵- فرض کنید  $f(x)$  بر بازه  $[0, 1]$  کراندار باشد و برای  $0 \leq x \leq \frac{1}{a}$  که  $a, b > 1$  در رابطه  $f(ax) = bf(x)$  صدق کند. مقدار

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{a}{b}$

(۲)  $\frac{b}{a}$

(۳) ۱

(۴)  $f(0)$

۱۶- اگر  $\mu^*$  اندازه ای خارجی روی  $X$ ،  $A \subseteq X$  و  $A^c$  متمم  $A$  باشد، آنگاه حکم  $\mu^*(BUC) = \mu^*(B) + \mu^*(C)$  برای هر

$C \subseteq A^c$  و  $B \subseteq A$

(۱) از اندازه پذیری  $A$  نسبت به  $\mu^*$  قوی تر است ولی با آن معادل نیست.

(۲) یا اندازه پذیری  $A$  نسبت به  $\mu^*$  معادل است.

(۳) از اندازه پذیری  $A$  نسبت به  $\mu^*$  ضعیف تر است ولی با آن معادل نیست.

(۴) با اندازه پذیری  $A$  نسبت به  $\mu^*$  اشیاطی ندارد.

۱۷- اگر  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  پیوسته و روی بازه باز  $(0, 1)$  مشتق پذیر باشد، کدام گزینه صحیح است؟

(۱)  $f'$  اندازه پذیر بورل و لیگ است.

(۲)  $f'$  اندازه پذیر لیگ است ولی اندازه پذیر بورل نیست.

(۳)  $f'$  اندازه پذیر بورل است ولی اندازه پذیر لیگ نیست.

(۴)  $f'$  نه اندازه پذیر لیگ است و نه اندازه پذیر بورل.

۱۸- اگر  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  اندازه پذیر لیگ و  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی پیوسته باشد، کدام گزینه صحیح است؟

(۱) اگر  $g$  اکیداً یکتوا باشد،  $f \circ g$  اندازه پذیر لیگ است.

(۲) اگر  $g^{-1}(N)$  برای هر مجموعه یوچ  $N$  اندازه پذیر لیگ باشد،  $f \circ g$  اندازه پذیر لیگ است.

(۳) اگر  $g$  پیوسته یکنواخت باشد،  $f \circ g$  اندازه پذیر لیگ است.

(۴)  $f \circ g$  اندازه پذیر لیگ است ولی  $g \circ f$  لزوماً اندازه پذیر لیگ نیست.

- ۱۹- فرض کنید  $f$  تابعی انتگرال پذیر (حقیقی مقدار) روی فضای اندازه  $(X, M, \mu)$  باشد و  $\lambda > 0$  و  $E_n = \{x \in X : f(x) \geq n\lambda\}$  ( $n \geq 1$ ) کدام گزینه صحیح است؟

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{E_n} f d\mu = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu^*(E_n) = 0 \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{E_n} f d\mu = 0 \quad (3) \quad (\text{همگرایی در اندازه نسبت به } \mu)$$

(۴) هر سه مورد.

- ۲۰- اگر  $C[a, b]$ ،  $C^1[a, b]$  و  $P[a, b]$  به ترتیب فضای توابع پیوسته، توابع به طور پیوسته مشتق پذیر و چند جمله‌ای‌ها روی  $[a, b]$  باشند، کدام گزاره صحیح است؟

(۱)  $C[a, b]$  در  $L^1[a, b]$  چگال است ولی  $C^1[a, b]$  و  $P[a, b]$  چگال نیستند.

(۲)  $C[a, b]$  و  $C^1[a, b]$  در  $L^1[a, b]$  چگال اند ولی  $P[a, b]$  چگال نیست.

(۳) هیچ یک در  $L^1[a, b]$  چگال نیست.

(۴) هر سه فضا در  $L^1[a, b]$  چگال اند.

- ۲۱- فرض کنید  $f$  و  $g$  توابعی انتگرال پذیر و حقیقی - مقدار روی فضای اندازه  $(X, M, \mu)$  باشند. کدام گزینه صحیح است؟

$$fg \in L^1(\mu) \quad (1)$$

$$fg \in L^2(\mu) \quad (2)$$

$$(f^2 + g^2)^{\frac{1}{2}} \in L^1(\mu) \quad (3)$$

(۴) هیچکدام

- ۲۲- فضای ضرب داخلی  $X = C[-1, 1]$  را با ضرب داخلی  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f \bar{g} dt$  در نظر بگیرید. فرض کنید

$M = \{f \in X : f(t) = 0 \text{ } (-1 \leq t \leq 0)\}$  در مورد مجموعه‌های  $M^{\perp\perp}$  و  $M \oplus M^{\perp}$  چه می‌توان گفت؟ که در آن برای هر

زیر فضای  $N$  از  $X$ ،  $N^{\perp} = \{f \in X : \langle f, g \rangle = 0, g \in N\}$

$$M \oplus M^{\perp} = X \text{ و } M^{\perp\perp} = M \quad (1)$$

$$M \oplus M^{\perp} \neq X \text{ ولی } M^{\perp\perp} = M \quad (2)$$

$$M^{\perp\perp} \neq M \text{ ولی } M \oplus M^{\perp} = X \quad (3)$$

$$M \oplus M^{\perp} \neq X \text{ و } M^{\perp\perp} \neq M \quad (4)$$



۲۶- اگر  $f(x) = \cos 2x$ ، آن گاه مقدار کسرهای تفاضلی  $f|_{0,0,0,0,0}$  و  $f|_{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}}$  به ترتیب برابرند با:

(۱) ۰ و ۰

(۲)  $\frac{1}{3}$  و ۰

(۳)  $\frac{-2}{3}$  و ۰

(۴)  $\frac{4}{15}$  و  $\frac{1}{3}$

۲۷- هرگاه تابع  $s(x)$  زیر با گره‌های ۱۰۰ و ۲ یک اسپلاین مکعبی باشد:

$$s(x) = \begin{cases} 3 + x - 9x^2 & 0 < x < 1 \\ a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

در این صورت،  $a$ ،  $b$  و  $c$  عبارتند از:

(۱)  $a = -5$ ،  $b = -26$ ،  $c = -27$

(۲)  $a = -26$ ،  $b = -5$ ،  $c = 3$

(۳)  $a = 3$ ،  $b = -27$ ،  $c = -5$

(۴)  $a = -27$ ،  $b = 3$ ،  $c = -5$

۲۸- برای داده‌های روبرو، درونیاب کسری عبارت است از:

$x_i$	۰	۱	۲	۳
$y_i$	۰	-۱	$-\frac{2}{3}$	۹

(۱)  $\frac{4x^2 - 9x}{7 - 2x}$

(۲)  $\frac{4x^2 + 9x}{2x - 7}$

(۳)  $\frac{4x^2 - 9x}{2x - 7}$

(۴)  $\frac{4x^2 + 9x}{7 - 2x}$



۳۹- مسأله‌ی درونیابی تابع گویا به صورت  $\phi(x) = \frac{c_0 + c_1 x}{d_0 + d_1 x}$  به داده‌ی  $(0, 1)$ ،  $(1, 2)$  و  $(2, 2)$ .....

(۱) یک جواب یگانه دارد

(۲) بی نهایت جواب دارد

(۳) دو جواب  $\phi(x) = 2$  و  $\phi(x) = \frac{2+2x}{1+x}$  دارد

(۴) جواب ندارد

۳۰- فرض کنید  $h = \frac{b-a}{5}$  و  $x_i = a + ih$ ، برای  $i = 0, 1, 2, \dots, 5$ . از کدام قاعده برای اندازه‌گیری عددی در تخمین

$\int_a^b f(x) dx$  استفاده کنیم، تا خطای برشی  $O(h^5)$  باشد؟ (فرض کنید  $f \in C^5[a, b]$ )

(۱) قاعده سیمسون

(۲) قاعده سیمسون و قاعده  $\frac{3}{8}$  (قاعده‌ی میلن)

(۳) قاعده  $\frac{3}{8}$  (قاعده‌ی میلن)

(۴) قاعده نقطه میانی و قاعده ذوزنقه‌ای

۳۱- اگر  $g(x) = f[x_0, \dots, x_n, x]$  تفاضلات تقسیم شده‌ی  $f(x)$  در نقاط  $x_0, \dots, x_n$  و  $x$  باشد، آن‌گاه مقدار  $g'(x)$  برابر است با: (فرض کنید  $f$  به دفعات مورد نیاز مشتق پذیر پیوسته است).

(۱)  $f[x_0, \dots, x_n, x, x]$

(۲)  $f[x_0, \dots, x_{n-1}, x]$

(۳)  $f[x_0, \dots, x_n, 1]$

(۴)  $f[x_1, \dots, x_n, x]$

۳۲- مسأله کمترین مربعات خطی  $\min \|\lambda t - y\|_2$  را در نظر بگیرید که در آن،  $y, \lambda \in \mathbb{R}^n$  داده شده‌اند و  $t \in \mathbb{R}$ . این مسأله

.....

(۱) می‌تواند جواب نداشته باشد

(۲) همواره دارای یک جواب یگانه است

(۳) جواب یگانه دارد اگر  $\lambda \neq 0$

(۴) همواره دارای بی‌نهایت جواب است

## پی اچ دی تست ، وب سایت تخصصی آزمون دکتری

صفحه ۱۰

305F

مجموعه دروسی تخصصی (آنالیز ریاضی ۱، جبر خطی، آنالیز عددی، آنالیز عددی پیشرفته، آنالیز حقیقی، تحلیلی دو عصبان پیشرفته)

۳۳- جدول زیر، مربوط به الگوریتم سیمپلکس دوگان برای حل یک مساله می نیم سازی است. مساله دوگان در امتداد ..... بی کران (نامتناهی) است (  $s_1$  و  $s_2$  متغیرهای کمبود (لنگی) هستند).

	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	RIHS
$c_j - z_j$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	
$x_1$	۱	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۰	۳
$s_2$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۱	-۱

$$(1) \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$(2) \left(\frac{1}{2}, -1\right)$$

$$(3) \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$(4) \left(-\frac{1}{2}, -1\right)$$

۳۴- فرض کنید  $a_1, a_2, \dots, a_n$  بردارهایی در  $\mathbb{R}^m$  و مجموعه  $P$  غلاف (پوسته) محدب این بردارها باشند. در این صورت، هر عضو مجموعه  $P$  را می توان به صورت یک ترکیب خطی محدب از ..... بردار از  $a_i$  ها نوشت.

(۱) حداکثر  $m+1$

(۲) دست کم  $m+1$

(۳) حداکثر  $m$

(۴) دست کم  $m$

$$\min \quad w = 2 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2$$

$$\text{s.t.} \quad y_1 + 2y_2 \geq 1$$

$$2y_1 + y_2 \geq 2$$

$$2y_1 + 2y_2 \geq 3$$

$$3y_1 + 2y_2 \geq 4$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

۳۵- مساله برنامه ریزی خطی روبرو را در نظر بگیرید.

جواب بهینه این مساله عبارتست از:

$$y_1^* = 1/2 \text{ و } y_2^* = 0/2$$

فرض کنید  $x_1, x_2, x_3, x_4$  متغیرهای دوگان

این مساله هستند. در این صورت، جواب بهینه مساله

دوگان عبارتست از .....

$$(1) x_1^* = x_2^* = 4 \text{ و } x_3^* = x_4^* = 0$$

$$(2) x_1^* = x_2^* = 0, x_3^* = 6 \text{ و } x_4^* = 1$$

$$(3) x_1^* = x_2^* = x_3^* = 0 \text{ و } x_4^* = 7$$

$$(4) x_1^* = x_2^* = 0, x_3^* = 5 \text{ و } x_4^* = \frac{13}{4}$$

۳۶- فرض کنید  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع به طور پیوسته مشتق پذیر است که:

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) \quad \forall x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n,$$

$$f(x) - f(\bar{x}) \leq \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) \quad \forall x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n.$$

اگر  $x^*$  جواب بهینه مساله  $\min \{f(x) \mid A x \leq b, x \geq 0\}$  باشد،  $A_{m \times n}$  باشد، آن گاه .....

(۱)  $x^*$  می تواند یک نقطه درون ناحیه شدنی باشد

(۲)  $x^*$  حداکثر  $m$  مولفه ی مثبت دارد

(۳) مساله دست کم یک جواب بهینه راسی (گوشه ای) دارد

(۴) اگر بیش از یک جواب بهینه داشته باشیم، آن گاه مجموعه جواب های بهینه شماراست

۳۷- فرض کنید مساله  $\min\{c^T x \mid Ax \leq b\}$  با  $A_{m \times n}$  داده شده یک مساله ناشدنی است. آن گاه، برداری مانند  $w$  وجود دارد به طوری که .....

(۱)  $A^T w \leq c$  و  $w \geq 0$

(۲)  $A^T w \geq c$  و  $w \geq 0$

(۳)  $A^T w = 0$  و  $\sum_{i=1}^m w_i = 1$ ،  $w \geq 0$

(۴)  $A^T w = 0$  و  $w > 0$

۳۸- جدول زیر، یک جدول روش  $-M$  بزرگ برای حل یک مساله LP می نیم سازی است.  $s_1$  و  $R_1$  ها به ترتیب متغیرهای کمکی (مازاد) و مصنوعی متناظر با محدودیت  $i$  ام هستند. مقدار تابع هدف دوگان برابر است با: .....

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$R_1$	$R_2$	RHS
$z_j - c_j$	0	0	0	$\alpha$	$\beta$	$p$	$q$	
$x_1$	1	0	2	-1	$\beta_1$	$p_1$	1	4
$x_2$	0	1	3	2	$\beta_2$	$p_2$	1	10

(۱)  $6\alpha + 2\beta$

(۲)  $2\alpha - 6\beta$

(۳)  $6\alpha - 2\beta$

(۴)  $2\alpha + 6\beta$

۳۹- در الگوریتم سیمپلکس اصلاح شده، ستون لولا (وارد شونده) به صورت  $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  است و  $C_B = (c_2, c_3, c_1)^T$ . اگر پایه های

پس از محورگیری و قبل از محورگیری را به ترتیب با  $B^{new}$  و  $B$  نمایش دهیم، آن گاه در رابطه  $BE = B^{new}$ ، مجموع درایه های ماتریس  $E$  برابر است با: .....

(۱) ۴

(۲)  $-\frac{1}{3}$

(۳)  $\frac{1}{3}$

(۴) -۴

۴۰- فرض کنید در یک مساله LP به صورت  $\min\{c^T x \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$  با  $b \geq 0$ ، برای تمامی جواب های بهینه، تمامی متغیرهای کمکی برابر صفر هستند. مقدار بهینه این LP برابر است با: .....

(۱)  $-\infty$

(۲) یک عدد مثبت

(۳) یک عدد منفی

(۴) صفر

۴۱- مسأله‌ی LP به صورت  $\max\{c^T x \mid A^T x \leq 0\}$  .....

- (۱) می‌تواند بی‌کران باشد
- (۲) یک دوگان شدنی دارد
- (۳) یک دوگان ناشدنی دارد
- (۴) همواره شدنی است و جواب بهینه دارد

۴۲- اگر به یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی که جواب بهینه دارد یک ستون جدید همراه با یک متغیر جدید و ضریب مربوط به آن در تابع هدف اضافه شود، آن‌گاه دوگان مسأله‌ی جدید:

- (۱) شدنی است.
- (۲) می‌تواند نامتناهی (بی‌کران) باشد.
- (۳) یا ناشدنی است یا جواب بهینه دارد.
- (۴) یا ناشدنی است یا نامتناهی (بی‌کران).

۴۳- فرض کنید در یک جدول سیمپلکس، همه‌ی متغیرهای پایه‌ای صفر هستند. گزینه صحیح کدام است؟

- (۱) فضای شدنی مسأله تنها شامل یک نقطه است.
- (۲) مسأله دارای جواب بهینه تباهیده است.
- (۳) مسأله جواب بهینه ندارد.
- (۴) اگر مسأله جواب بهینه چندگانه داشته باشد، آن‌گاه مجموعه جواب‌های بهینه، بی‌کران است.

۴۴- فرض کنید:  $A = [a_1, \dots, a_n]_{m \times n}$ ،  $B = [b_1, \dots, b_n]_{s \times n}$  و همه‌ی درایه‌های A و B مثبت هستند. مسأله‌ی زیر را با

$x \in \mathbb{R}^n$  و  $x_{n+1} \in \mathbb{R}$  در نظر بگیرید. گزینه‌ی صحیح کدام است؟

- $$\begin{array}{ll} \min & x_{n+1} \\ \text{s.t.} & Ax \leq x_{n+1} a_1 \\ & Bx \geq b_1 \\ & x \geq 0 \end{array}$$
- (۱) اگر  $a_1 < b_1$ ، آن‌گاه مسأله بی‌کران است.
  - (۲) مسأله بی‌کران نیست.
  - (۳) اگر  $a_1 > b_1$ ، آن‌گاه مسأله بی‌کران است.
  - (۴) مسأله بی‌کران است.

۴۵- مسأله‌ی (p) را که در آن  $c, u \in \mathbb{R}^n$ ،  $b \in \mathbb{R}^m$  و  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ، در نظر بگیرید. ستون  $a_j$  از A را با نمایش دهید.

دوگان (p) را (D) و بردار متغیرهای (D) را  $x$  بنامید. فرض کنید  $(w, v)$  و  $x$  به ترتیب برای مسأله‌های (p) و (D) شدنی هستند. شرایط (۱) و (۲) را در نظر بگیرید.

$$\begin{array}{ll} \max & z = w^T b + v^T u \\ \text{s.t.} & A^T w + v \leq c \\ & v \geq 0 \end{array} \quad (p)$$

$$\begin{array}{ll} (1) & x_j < u_j \Rightarrow w^T a_j \leq c_j \quad \forall j \\ (2) & x_j > 0 \Rightarrow w^T a_j \geq c_j \quad \forall j \end{array}$$

اگر شرایط ..... برقرار باشند، آن‌گاه  $(v, w)$  جواب بهینه‌ی (p) است.

- (۱) (۱)
- (۲) (۲)
- (۳) (۱) و (۲)
- (۴) (۱) و (۲) یا  $v = 0$